Assignment #4

1.

a) 不能.

反例: $X=\{a,b,c\}$

$$f: X \longrightarrow X$$

$$a \longmapsto a$$
$$b \longmapsto c$$
$$c \longmapsto b.$$

则 f 有唯一的不动点 a. 但是 $f\circ f = id_X$. 故而 $f\circ f$ 有三个不动点.

b).

证明: 先证 f 不动点之唯一性

假定 f 有两个不动点 a 和 b. 即

$$f(a)=a, \quad f(b)=b.$$

则

$$(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(a)=a, \quad (f\circ f)(b)=f(f(b))=f(b)=b.$$

故 $f\circ f$ 至少有两个不动点 a 和 b. 与 f 有唯一不动点矛盾.

下面我们证明 f 不动点之存在性

由于 $f\circ f$ 存在不动点, 根据不动点之定义, 我们有 $X\neq \phi$.

不妨假定 $a\in X$ 为 $f\circ f$ 之不动点.

考虑 $f(a)$: 若 $f(a)=a$. 则 a 为 f 之不动点. 我们得到了 f 不动点之存在性.

若 $f(a)\neq a$. 令 $b=f(a)$. 我们有

$$f(a)=b. \quad 且 \quad b\neq a$$

断言. a 和 b 均为 $f\circ f$ 之不动点.

断言之证明. 由于 a 为 $f\circ f$ 之不动点, 我们只需证明 b 亦为 $f\circ f$ 之不动点即可. 事实上, 我们有

$$
\begin{aligned}
(f\circ f)(b) &= f(f(b)) \\
&= f(f(f(a))) \\
&= f((f\circ f)(a)) \\
&= f(a) \quad [因为 a 为 f\circ f 之不动点]
\end{aligned}
$$

$= b$.

故而断言得证.

基于此断言, 我们有"a和b都是$f\circ f$之不动点 且 $a\neq b$". 这与$f\circ f$有唯一不动点矛盾. 故而$f(a)\neq a$不成立. 换言之.

$$f(a)=a$$

从而a为f之不动点. 我们证明了f不动点之存在性.

综上, 若$f\circ f$有唯一不动点, 则f亦有唯一不动点. $\square$

2.

PROOF:

a). 对于$\frac{p}{q}\in\mathbb{R}$. $(q\neq 0)$. 我们来证明$\frac{p}{q}$为代数数.

事实上. 令$x=\frac{p}{q}$. 则

$$qx=p.$$

故而 $$qx-p=0.$$

从而$\frac{p}{q}$为一次整系数方程$qx-p=0$之根. 故为代数数 $\square$

PROOF:

b) 若 a 为非零代数数. 我们证明 $\frac{1}{a}$ 亦是代数数

因为 a 为代数数. $\exists\, n \in \mathbb{N}$ 和 $c_0, c_1, \dots c_n \in \mathbb{Z}$. 使得

$$c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = 0$$

由于 $a \neq 0$. 故 $a^n \neq 0$. 上式两边同除以 a^n 得

$$c_n + c_{n-1}\cdot\left(\frac{1}{a}\right) + \cdots + c_1\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} + c_0\left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$$

故 $\frac{1}{a}$ 为整系数方程

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n = 0$$

之根. 从而 $\frac{1}{a}$ 为代数数. $\square$

PROOF:

c) 若 a 为代数数. b 为有理数. 我们来证明 $a+b$ 也是代数数

由于 a 为代数数. $\exists\, n \in \mathbb{N}$ 及 $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$. 使得

$$\sum_{k=0}^{n} c_k a^k = 0.$$

令 $a + b = u$. 则

$$a = u - b.$$

故而
$$\sum_{k=0}^{n} C_k(u-b)^k = 0.$$

换言之，u 为 k 次有理系数方程（注意到 $b \in \mathbb{Q}$）

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x-b)^k = 0$$

之根.

我们课上证明过（具体参见课件），在代数数的定义中，"有理系数方程之根"和"整系数方程之根"是等价的. 故而 u 为代数数.

从而 $a+b$ 为代数数. $\square$

PROOF:

2). 若 a 为代数数，b 为有理数. 我们来证明 $a \cdot b$ 也是代数数.

证明思路和 1) 之证明类似.

令
$$u = a \cdot b.$$

若 $b=0$，则 $u=0$，而 0 为一次方程

$$x=0$$

之根. 从而 u 为代数数.

若 $b \neq 0$. 则 $a = \frac{u}{b}$.

由 a 为代数数, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ 及 $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{Q}$. s.t.

$$\sum_{k=0}^{n} c_k a^k = 0$$

故

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left(\frac{u}{b}\right)^k = 0$$

亦即

$$\sum_{k=0}^{n} \left[c_k \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^k\right] \cdot u^k = 0$$

由 $b \in \mathbb{Q}$, 我们由上知 u 为某个有理系数方程之根. 亦即 u 为代数数. 故 $a \cdot b$ 为代数数. $\square$